Автоматика и телемеханика, № 9, 2024

Нелинейные системы

© 2024 г. **В.Н. ТХАЙ, д-р физ.-мат. наук (tkhai@ipu.ru)**
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

АДАПТИВНАЯ СХЕМА СТАБИЛИЗАЦИИ КОЛЕБАНИЙ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ [1]

Рассматривается гладкая автономная система общего вида. Строится глобальное семейство (по параметру h) невырожденных периодических решений; на нем период меняется монотонно. Решается задача стабилизации колебаний редуцированной управляемой системы. Применяется гладкое автономное управление с параметром, зависящим от h, конструируется притягивающий цикл. Результаты конкретизируются для дифференциального уравнения n-го порядка. Устанавливается соответствие результатов с выводами, полученными для обратимой механической системы. Для редуцированной консервативной системы предлагается адаптивная схема управления для стабилизации любого колебания семейства. Приводятся приложения.

Ключевые слова: автономная система, невырожденное периодическое решение, глобальное семейство, теорема Ляпунова о центре, адаптивная схема, притягивающий цикл, естественная стабилизация.

DOI: 10.31857/S0005231024090046, **EDN:** ZQVIDC

1. Введение

Решается задача управления колебаниями (периодическими решениями) автономной системы общего вида. В невырожденном случае справедлива альтернатива: цикл (изолированное колебание) или семейство колебаний. Период на семействе невырожденных колебаний монотонно зависит от параметра семейства h. Поэтому в задаче о стабилизации колебаний семейства естественно искать управление с параметром, зависящим от h. В адаптивной системе управления "регулятор автоматически изменяет свою структуру или *свои параметры в зависимости от изменения параметров объекта управления* или свойств возмущения" [1, с. 108].

В данной статье применяется *автономное* управление, в котором параметр в регуляторе находится в зависимости от значения параметра h стабилизируемого колебания семейства: регулятор обладает свойством *адаптивности.* В этом смысле говорится об адаптивной схеме управления.

В следующем примере

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon u, \quad u = (1 - Kx^2)\dot{x} \tag{1}$$

[1] Статья подготовлена к трехсотлетию Российской академии наук.

управление u содержит параметр K; ω – частота линейного осциллятора. При $\varepsilon = 0$ уравнение (1) допускает семейство колебаний $x = A\cos\varphi$ с амплитудой A и энергией $h = \omega^2 A^2/2$. Для стабилизации выбранного колебания семейства с энергией $h = h^*$ в (1) полагается $K = 2\omega^2/h^*$. Тогда в (1) реализуется притягивающийся цикл, близкий к колебанию линейного осциллятора с энергией h^*. Формула для K справедлива для любого колебания семейства. Применяется адаптивная схема стабилизации.

Уравнение (1) называется осциллятором типа Ван дер Поля. Уравнение Ван дер Поля [2] получается в (1) при $K = 1$: в регеративном приемнике ω настраивается на частоту принимаемого сигнала.

Линейный осциллятор допускает семейство изохронных колебаний. В математическом маятнике период колебаний является монотонной функцией параметра семейства. Такое семейство колебаний называется невырожденным [3].

При исследовании колебаний в многомерной автономной системе необходимо описать все множество невырожденных колебаний. Возникает проблема глобального семейства колебаний: существование, построение, свойства. Кроме интереса для теории обыкновенных дифференциальных уравнений, знание о глобальном семействе гарантирует полноту решения задачи управления.

Основное положение о глобальном семействе заключается в возможности продолжения любого локального невырожденного семейства периодических решений на глобальное семейство, на котором параметр семейства принимает всевозможные для решений семейства значения. Построение глобального семейства для частного случая проводилось в [3]. Адаптивная схема стабилизации колебаний для редуцированной системы на плоскости приводилась в [3]: строился притягивающий цикл.

Глобальное семейство описывается редуцированной системой, размерность которой совпадает с размерностью k этого семейства. В общем случае – системы из n дифференциальных уравнений – имеем $1 < k \leqslant n$. Вопросы существования глобального семейства, выделения редуцированной системы и построения для нее адаптивной схемы стабилизации колебаний рассматриваются в данной статье. Результаты конкретизируются для дифференциального уравнения n-го порядка. Также выясняется, как полученные выводы соотносятся с результатами для систем, обладающих свойствами обратимости, консервативности.

Приводятся приложения. Задача трех тел введена Л. Эйлером в 1764 г. (опубликована в [4]) при изучении движения Луны. Показывается, как в задаче строятся глобальные семейства периодических орбит; адаптивная схема применяется для орбитальной стабилизации. Задача В.В. Белецкого [5] описывает колебания спутника в плоскости эллиптической орбиты. В частном случае – на круговой орбите адаптивной схемой управления стабилизируется любое колебание спутника.

2. Теорема о глобальном семействе

Рассматривается гладкое автономное уравнение

$$\dot{z} = Z(z), \quad z \in \mathrm{R}^n, \tag{2}$$

общее решение которого обозначается через $z(z_1^0, \ldots, z_n^0, t)$, где $z^0 = (z_1^0, \ldots$ $\ldots, z_n^0)$ – начальная точка (при $t = 0$). Необходимое и достаточное условие существования T-периодического решения системы (2) записывается в виде равенства

$$f \equiv z(z_1^0, \ldots, z_n^0, T) - z^0 = 0. \tag{3}$$

Пусть уравнение (3) имеет решение $z^0 = z^*$, $T = T^*$, не совпадающее с равновесием: $Z(z^*) \neq 0$. Тогда уравнение (3) допускает семейство по γ решений

$$z^0 = z^*(\gamma), \quad T = T^*, \tag{4}$$

где γ – сдвиг начального момента времени по траектории. При этом ранг Ra функциональной матрицы A_f (матрицы Якоби) для функции f с параметром T в точке z^* при $T = T^*$ удовлетворяет неравенству $\mathrm{Ra} \leqslant n - 1$.

Случай $\mathrm{Ra} = n - 1$ называется невырожденным для периодического решения (см. [3]). Далее рассматривается случай $\mathrm{Ra} = n - 1$.

В невырожденном случае матрица A_f имеет простое нулевое собственное значение или жорданову k-клетку из нулевых собственных значений: $1 < k \leqslant n$. В первой ситуации уравнение (3) допускает единственное решение вида (4). Поэтому автономное уравнение (2) допускает изолированное периодическое решение – цикл с периодом T^*.

Вторая ситуация называется случаем семейства периодических решений.

В окрестности решения (4) уравнения (3) выводится линейная система

$$\begin{gathered}\xi_s \equiv \frac{\partial f_s}{\partial z_1^0} dz_1^0 + \ldots + \frac{\partial f_s}{\partial z_n^0} dz_n^0 + \frac{\partial f_s}{\partial T} dT = 0, \quad s = 1, \ldots, n, \\ f = (f_1, \ldots, f_n),\end{gathered} \tag{5}$$

которая справедлива при произвольном γ. Ранг матрицы A_f в (5) равен $\mathrm{Ra} =$ $= n - 1$. Цикл получается для простого нулевого собственного значения: в (5) имеем решение $dz_1(\gamma) = \ldots = dz_n(\gamma) = 0$, $dT = 0$.

Случай семейства реализуется при $dT \neq 0$. Производные

$$\frac{df_s}{dT} = Z_s(z^*(\gamma)), \quad s = 1, \ldots, n,$$

вычисляются в точке (4) и обеспечивают равенство ранга расширенной матрицы в (5) числу $n - 1$. При этом из (5) вычисляются $dz_1^0(\gamma), \ldots, dz_k^0(\gamma)$ как линейные функции dT. При изменении dT получается семейство решений.

Сам период T меняется от решения к решению, т.е. является функцией скалярного параметра h: $z^0 = z^0(\gamma, h)$, $T = T(h)$. Таким образом, из системы (5) находится локальное h-семейство. Производная $T'(h^*) \neq 0$ для значения параметра $h = h^*$. Поэтому на семействе период $T(h)$ меняется монотонно вместе с параметром семейства h. В этом смысле h-семейство является невырожденным [3].

Определение 1. Семейство периодических решений уравнения (2) *называется невырожденным, если период $T(h)$ на нем монотонно зависит от параметра h.*

Из изложения следует, что точка $z^0 = z^*$ периодического решения уравнения (2) обладает свойством приводить к невырожденному семейству периодических решений. Само опорное периодическое решение также принадлежит семейству. В этом смысле оно называется невырожденным. Невырожденным будет и любое периодическое решение невырожденного семейства.

Определение 2. Решение, принадлежащее невырожденному семейству периодических решений, называется невырожденным.

Невырожденное периодическое решение продолжается по периоду T или то же самое – по параметру семейства h. Это свойство называется *свойством локальной продолжимости.* Невырожденное периодическое решение продолжается одновременно в стороны увеличения и уменьшения периода.

В [3] вводится понятие глобального семейства периодических решений.

Определение 3. Невырожденное семейство периодических решений, на котором параметр h принимает всевозможные для решений семейства значения, называется глобальным семейством.

При приведении матрицы A_f к каноническому виду система (5) распадается на подсистемы, одна из которых – с жордановой k-нулевой клеткой – приводит к семейству периодических решений, другая подсистема в (5) имеет нулевое решение. Поэтому в новых переменных семейство периодических решений описывается k переменными. В фазовом пространстве глобальное семейство представляется связным k-мерным множеством точек.

В невырожденном для периодического решения случае $\mathrm{Ra} = n - 1$ справедлива

Теорема 1. Пусть уравнение (2) *допускает невырожденное периодическое решение. Тогда оно продолжается по периоду T на глобальное семейство Σ. На Σ период $T(h)$ монотонно зависит от параметра семейства h. Семейство Σ заполняет глобальную область $\hat{\Sigma}$; Σ описывается редуцированной системой k-го порядка. Для точек области $\hat{\Sigma}$ ранг $\mathrm{Ra} = n - 1$, на ее границе $\partial\hat{\Sigma}$ условие $\mathrm{Ra} = n - 1$ не выполняется.*

Доказательство. Невырожденное периодическое решение обладает свойством локальной продолжимости. Это свойство не зависит от размерности k жордановой клетки с нулевыми собственными значениями матрицы A_f.

Поэтому доказательство теоремы 1 с точностью до размерности жордановой k-нулевой клетки и несущественных редакционных изменений совпадает с доказательством теоремы [3, теорема 1] для случая $k = 2$. При этом редуцированная система описывается системой k-го порядка.

Замечание 1. При подходе к границе $\partial\hat{\Sigma}$ прозводная $T'(h)$ может стремиться к нулю, бесконечности или перестает существовать.

Замечание 2. В системе (2) возможно одновременное существование нескольких глобальных семейств периодических решений с одним k. Также нет препятствий к одновременному существованию глобальных семейств с разными k.

3. Адаптивная схема управления для редуцированной системы

Согласно теореме 1 глобальное семейство периодических решений $\Sigma = \{\varphi_s(h,t)\}$ может описываться редуцированной системой в R^{k}:

$$\dot{x}_s = X_s(x_1, \dots, x_k), \quad s = 1, \dots, k. \tag{6}$$

Ставится задача стабилизации любого $T(h)$-периодического колебания φ из семейства Σ, выбранного значением параметра h. Применяется управление, содержащее параметр K; значение K выбирается в зависимости от величины h: $K = K(h)$. Управление задается гладкой функцией F переменных $x_1, \dots, x_k$ и действует с малым коэффициентом ε усиления сигнала регулятора. В управляемой системе

$$\dot{x}_s = X_s(x_1, \dots, x_k) + \varepsilon F_s, \quad s = 1, \dots, k, \tag{7}$$

стабилизируемое колебание будет ε-близким к колебанию системы (7). Параметром K в управлении обеспечивается тождественное выполнение по h условий существования в (7) периодического решения. Тогда колебание с параметром $h = h^*$ стабилизируется при подстановке в управление F числа $K = K(h^*)$, для которого выполняется условие $dK(h^*)/dh \neq 0$. В частном случае $k = 2$ схема реализована в [3].

Задача стабилизации ставится в малом. Она решается построением притягивающего цикла. Поэтому далее находятся условия существования цикла и вычисляются характеристические показатели (ХП) для цикла. Эти задачи решаются в окрестности опорного колебания $x = \varphi(h^*, t)$ линеаризованной системой. Управления F_s вычисляется на опорном колебании. Отклонения от опорного колебания и число ε рассматриваются одного порядка.

В системе (7) полагается: $\Delta_s = x_s - \varphi_s$, $s = 1, \dots, k$. Выписываются уравнения для переменных Δ_s. В линейном приближении по Δ_s получаются уравнения для вариаций δx_s. Далее анализируется периодическое решение управляемой системы

$$\delta\dot{x}_s = p_{s1}\delta x_1 + \ldots + p_{sk}\delta x_k + \varepsilon F_s, \quad s = 1, \dots, k. \tag{8}$$

Система (8) с точностью до нелинейных членов совпадает с системой, выводимой из (7) для приращений Δ_s. В окрестности опорного колебания из линеаризованной системы (8) выводится цикл системы (7).

На многообразии $\hat{\Sigma}$ переменные

$$\delta x_j = \frac{\partial x_j}{\partial h}, \quad j = 1, \dots, k,$$

являются функциями h и t. Через $\{y_1, \dots, y_k\}$ обозначается решение сопряженной системы. Тогда соотношение

$$y_1 \delta x_1 + \ldots + y_k \delta x_k = \mathrm{const} \tag{9}$$

представляет первый интеграл линейной однородной системы в (8). Набором этих интегралов однородная линейная система с периодическими коэффициентами в (8) приводится к системе с постоянными коэффициентами. Для случая жордановой k-нулевой клетки получаются уравнения

$$\dot{u}_1 = 0, \quad \dot{u}_2 = -u_1, \dots, \dot{u}_k = -u_{k-1}. \tag{10}$$

Выпишем все решения сопряженной системы:

$$\begin{aligned} y_{s1} &= \psi_{s1}, \\ y_{s2} &= t\psi_{s1} + \psi_{s2}, \\ &\dots \\ y_{sk} &= \frac{t^{k-1}\psi_{s1}}{k-1} + \ldots + t\psi_{s,k-1} + \psi_{sk}, \end{aligned} \tag{11}$$

где ψ_{sj} – функции с периодом $T(h)$. Тогда преобразование Ляпунова дается формулами

$$u_j = \psi_{1j}\delta x_1 + \ldots + \psi_{kj}\delta x_k, \qquad j = 1, \dots, k, \tag{12}$$

с невырожденной периодической матрицей $||\psi_{sj}(h,t)||$. Из этих формул получаются производные

$$\dot{u}_j = \psi_{1j}\frac{d\delta x_1}{dt} + \ldots + \psi_{kj}\frac{d\delta x_k}{dt} + \dot{\psi}_{1j}\delta x_1 + \ldots + \dot{\psi}_{kj}\delta x_k, \quad j = 1, \dots, k.$$

Поэтому управляемая система (8) в переменных u_j отличается от (10) слагаемыми неодродности и записывается в виде:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= \varepsilon(\psi_{11}F_1 + \ldots + \psi_{k1}F_k) = \varepsilon\hat{F}, \\ \dot{u}_j &= -u_{j-1} + \varepsilon(\psi_{1j}F_1 + \ldots + \psi_{kj}F_k), \quad j = 2, \dots, k. \end{aligned} \tag{13}$$

Системой (13) на многообразии $\hat{\Sigma}$ при $T = T^*$ задается отображение $t : 0 \to T^*$. При $\varepsilon = 0$ отображение допускает нулевую неподвижную точку. При

$\varepsilon \neq 0$ необходимые условия существования неподвижной точки даются амплитудным уравнением

$$I(h) \equiv \int\limits_0^{T^*} \hat{F} dt = \int\limits_0^{T^*} \sum_{s=1}^{k} \psi_{s1} F_s dt = 0 \tag{14}$$

(см. [6, гл.VI, §8, стр. 413, §9, стр. 417]). Уравнение (14) составляется относительно неизвестной h, при этом функция $\hat{F}$, наряду с h, содержит параметр $K = K(h^*)$. Конкретный вид (14) приводится к примеру далее для (21). Простому корню $h = h^*$ амплитудного уравнения (14) отвечает изолированное периодическое решение системы (13), значит, системы (8). Система (8) с точностью до нелинейных слагаемых (в окрестности исследуемого колебания) описывает цикл системы (7). Поэтому цикл системы (7) выводится из амплитудного уравнения (14). Достаточным условием существования цикла будет неравенство $dI(h^*)/dh \neq 0$.

ХП цикла находятся из уравнений в вариациях. В случае жордановой k-нулевой клетки для определения ХП вычисляется одно число α (см. [6, гл. 3, § 11]). Оно показывает изменение вариации за период. Сами вариации находятся как производные от функций u_s по параметру h.

Первое уравнение системы (13) записывается следующим образом:

$$\dot{u}_1(h^*, t) = \varepsilon \left[\hat{F}_* + \sum_{s=1}^{k} \left(\frac{\partial \hat{F}}{\partial x_s} \frac{\partial x_s}{\partial h} \right)_* \Delta h + \ldots \right],$$

где звездочкой помечено вычисление при $h = h^*$. Тогда для приращения Δh получается

$$\frac{d(\Delta u_1)}{dt} = \varepsilon \left[\sum_{s=1}^{k} \left(\frac{\partial \hat{F}}{\partial x_s} \frac{\partial x_s}{\partial h} \right)_* \Delta h + \ldots \right],$$

откуда находится уравнение для производной

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial u_1}{\partial h} \right)_* = \varepsilon \sum_{s=1}^{k} \left(\frac{\partial \hat{F}}{\partial x_s} \frac{\partial x_s}{\partial h} \right)_* = \varepsilon \frac{\partial \hat{F}(h^*, t)}{\partial h}.$$

Изменение производной за период приводит к ХП цикла

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial h} \right)_* = \frac{\varepsilon}{T^*} \int\limits_0^{T^*} \frac{\partial \left(\sum\limits_{s=1}^{k} \psi_s(h^*, t) F_s(h^*, t) \right)}{\partial h} dt.$$

Таким образом, ХП цикла α вычисляется по формуле

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{T^*} \int\limits_0^{T^*} \frac{\partial \hat{F}(h^*, t)}{\partial h} dt. \tag{15}$$

Теорема 2. Для редуцированной управляемой системы (7) *задача стабилизации цикла для любого выбранного значения параметра* $h = h^*$ *решается гладким управлением* F*, действующим с малым коэффициентом усиления сигнала регулятора. Достаточным условием стабилизации является выполнение неравенства* $dI(h^*)/dh < 0$ *на корень амплитудного уравнения* (14). *Характеристический показатель цикла вычисляется по формуле* (15).

Теорема 2 применяется ко всем колебаниям глобального семейства. Управление содержит параметр h, находится из условия тождественного выполнения по h амплитудного уравнения и строится как обобщение универсального управления из [7]. В случае $k = 2$ ряд конкретных управлений, удовлетворяющих теореме 2, приведен в [3]. Для уравнения n-порядка адаптивное управление дается в разделе 4.

Замечание 3. Согласно теореме 2 задача стабилизации цикла решается управлением $\hat{F}$. Поэтому в системе (8) можно выбирать управление $\hat{F}$, в котором полагается, например, $F_s \equiv 0; s = 2, \ldots, k$. Для уравнения второго порядка ($k = 2$) применяется управление, в котором $F_1 \equiv 0,\ F_2 \neq 0$.

4. Дифференциальное уравнение n-го порядка

Случай жордановой n-клетки с нулевыми собственными значения матрицы A_f является единственным для одного дифференциального уравнения n-го порядка

$$x^{(n)} = X(x, x', \ldots, x^{(n-1)}), \tag{16}$$

где $x^{(j)}$ означает производную j-го порядка от x.

В самом деле, уравнение (16) записывается как система

$$\begin{aligned} \dot{x}_s &= x_{s+1}, \quad s = 1, \ldots, n-1, \\ \dot{x}_n &= X(x_1, \ldots, x_n), \end{aligned} \tag{17}$$

где функции в (2) равны: $X_s = x_{s+1},\ s = 1, \ldots, n-1$. Поэтому из уравнения (3) получается, что сама матрица A_f представляет собой жорданову n-клетку с нулевыми собственными значениями.

Таким образом, если система (17) обладает невырожденным периодическим решением, то оно согласно теореме 1 принадлежит глобальному семейству $T(h)$-периодических решений, на котором период монотонно зависит от параметра h. Решения задаются в пространстве $(x, x', \ldots, x^{(n-1)})$. Периодическое решение уравнения (16) обозначается через $x = \varphi(h, t)$.

Поставим задачу стабилизации выделенного значением $h = h^*$ решения уравнения (16). Для этого в записи системы (7) выбирается векторное управление $F = (F_1, \ldots, F_n)$, удовлетворяющее амплитудному уравнению (14) с простым корнем. В теореме 2 применяется скалярное управление $\hat{F}$, формируемое из координат вектора F. В частном случае системы (7) – уравнения (17) полагается: $F_1 = \ldots = F_{n-1} = 0$, а функция F_n выписывается в явном виде. Тогда получается управляемая система

$$x^{(n)} = X(x, x', \ldots, x^{(n-1)}) + \sigma\varepsilon[1 - Kx^2]x', \tag{18}$$

где управление F_n действует с малым коэффициентом усиления, а число σ равно 1 или (-1). Коэффициент K выбирается в зависимости от значения параметра h: $K = K(h)$. Для стабилизации колебания с $h = h^*$ принимается $K = K(h^*)$.

Таким образом строится адаптивная схема управления.

Применяемое в (18) управление является аналогом универсального управления, предложенного в [7]. Оно удовлетворяет амплитудному уравнению (14), которое почти для всех точек семейства по параметру h имеет простой корень.

Функция $K(h)$ получается из условия тождественного выполнения по h амплитудного уравнения (14) и вычисляется по формуле

$$K(h) = \frac{\int\limits_0^{T(h)} \psi_{nn}(h,t)\varphi'(h,t)dt}{\int\limits_0^{T(h)} \varphi^2(h,t)\psi_{nn}(h,t)\varphi'(h,t)dt};$$

функция $\psi_{nn}(h,t)$ берется из (12). Тогда для функции $I(h)$ из (14) в точке $h = h^*$ справедливы формулы

$$\frac{dI(h^*)}{dh} = \chi\nu(h^*), \quad \chi = \frac{dK(h^*)}{dh}, \quad \nu(h^*) = \int\limits_0^{T(h^*)} \psi_{nn}(h^*,t)\varphi'(h^*,t)dt. \tag{19}$$

В результате справедлива следующая

Т е о р е м а 3. Если дифференциальное уравнение n-го порядка допускает невырожденное периодическое решение, то оно принадлежит глобальному семейству по скалярному параметру h. Решение со значением параметра $h = h^*$, $\chi\nu \neq 0$, стабилизируется по адаптивной схеме управления (18), *в которой полагается $K = K(h^*)$: знак числа σ обеспечивает притяжение к циклу.*

З а м е ч а н и е 4. Из записи уравнения (16) в виде (17) и применения для (17) адаптивной системы управления раздела 4 следует, что в уравнении (18) притяжение к циклу происходит в пространстве $(x, x', \ldots, x^{(n-1)})$.

5. Симметричные периодические движения

Автономная система общего вида (2) может обладать дополнительными свойствами, например быть консервативной, обратимой, записываться в гамильтоновой форме и т.д. При этом теорема 1 остается справедливой. Однако для некоторых систем теорема 1 нуждается в уточнении.

Далее понятие глобального семейства периодических решений ОДУ конкретизируется для симметричных периодических движений.

Обратимая динамическая система с фазовым вектором z и невырожденным отображением G обладает свойством пространственно-временной симметрии в смысле инвариантности относительно преобразования: $(z, t) \to \to (Gz, -t)$. Она описывает модели в различных областях знаний (см. обзор [8]). В случае

$$G = \left\| \begin{matrix} I_l & 0 \\ 0 & -I_n \end{matrix} \right\|, \quad l \geqslant n$$

(I_j – единичная $(j \times j)$-матрица) получим обратимую механическую систему [9]. Фазовое пространство этой системы описывается векторами u и v такими, что $\dim u = l$, $\dim v = n$, а преобразование симметрии имеет вид $(u, v, t) \to (u, -v, -t)$. При этом в механике за вектор u обычно принимается вектор обобщенных координат (квазикоординат), а за вектор v – вектор обобщенных скоростей (квазискоростей). Множество $M = \{u, v : v = 0\}$ называется неподвижным множеством обратимой механической системы.

Фазовый портрет обратимой механической системы симметричен относительно множества M. Траектории, пересекающие M, называются симметричными. Двоекратное пересечение траекторией множества приводит к симметричному периодическому движению (СПД). На СПД периода $T/2$ в моменты времени $t = 0, T/2$ траектория пересекает множество M. Необходимые и достаточные условия существования СПД периода $T/2$ даются равенствами

$$v_s(u_1^0, \ldots, u_l^0, \tau) = 0, \quad \tau = 0, T/2; \quad s = 1, \ldots, n, \tag{20}$$

где $u^0 \in M$ – значение на СПД. Вводится матрица

$$A(u^0, T/2) = ||a_{sj}|| = \left\| \frac{\partial v_s(u_1^0, \ldots, u_l^0, T/2)}{\partial u_j^0} \right\|.$$

Определение 4. Случай $\det A(u^0, T/2) \neq 0$ *называется невырожденным для симметричного периодического движения, а само СПД – невырожденным.*

СПД является периодическим решением. Из определения 4 следует, что невырожденные СПД образуют семейство, на котором монотонно меняется период: для него справедливо определение 1. Равенство (20) также справедливо на периоде. При этом условия (3), записанные для СПД, выполняются тождественно по $(l - n)$ значениям u_j^0. Значит, матрица A_f в (5) содержит

$(l-n)$ простых нулевых собственных значений. Поэтому условие невырожденности $\operatorname{rank} A_f = \mathrm{Ra} = l+n-1$, введенное для системы общего вида (2), выполняется для обратимой механической системы только при $l = n$. Соответственно, теорема 1 справедлива для СПД только в случае $l = n$.

С другой стороны, определение 3 в формулировке, где в обратимой механической системе не подразумевается условие невырожденности в виде равенства $\mathrm{Ra} = l+n-1$, остается справедливым для СПД в общей ситуации. Поэтому теорема 1 о глобальном семействе остается справедливой в следующей формулировке.

Теорема 4. *Невырожденное СПД обратимой механической системы всегда продолжается на глобальное семейство невырожденных СПД, которое описывается редуцированной обратимой механической системой с переменными: вектором $u \in \mathrm{R}^{l-n}$ и скаляром v.*

Наиболее полное доказательство теоремы 4 приведено в [10]. Адаптивная схема стабилизации колебаний для редуцированной обратимой механической системы построена в [11].

Теоремой 4 закрывается важный вырожденный для теоремы 1 случай симметричных периодических движений.

6. Консервативная система

Для определенности полагается, что консервативная система задается уравнениями Лагранжа второго рода и подвержена действию потенциальных сил. Тогда она описывается системой уравнений второго порядка. Пусть через q и $\dot{q}$ обозначены векторы координат и скоростей соответственно. Тогда динамические уравнения инвариантны относительно замены: $(q, \dot{q}, t) \to (q, \dot{q}, -t)$. Поэтому консервативная система принадлежит к классу обратимых механических систем, где размерности векторов q и $\dot{q}$ совпадают. Положения равновесия системы принадлежат неподвижному множеству системы. Невырожденные равновесия делятся на центры и седла. Согласно теореме Ляпунова о центре (см. [12]), к центру примыкает локальное семейство нелинейных периодических движений (ляпуновское семейство). Для него размерность нулевой жордановой клетки $k = 2$. В силу наличия в системе интеграла энергии период на семействе будет монотонной функцией постоянной энергии h. Поэтому ляпуновское семейство состоит из невырожденных периодических движений. По теореме 1 оно продолжается на глобальное семейство невырожденных периодических решений, причем редуцированная система содержит два уравнения первого порядка. Такой же вывод получается по теореме 4, но здесь уточняется, что редуцированная система принадлежит к классу обратимых механических систем. В силу консервативности исходной системы получается редуцированная консервативная система с одной степенью свободы (см. [13, лемма П.1]).

Таким образом, ляпуновские семейства консервативной системы всегда продолжаются на глобальные семейства симметричных периодических движений: справедлива глобальная теорема Ляпунова о центре, выведенная впервые в [3].

Консервативная система может описываться уравнениями, не принадлежащими к классу обратимых механических систем. В этом случае применение к системе теоремы 1 также приводит к редуцированной консервативной системе с одной степенью свободы: интеграл энергии сохраняется.

Для обратимой системы с одной степенью свободы в [7, теорема 1] построена управляемая система, которая почти для всех колебаний решает задачу стабилизации. Оказывается, в редуцированной консервативной системе стабилизируются все колебания семейства.

Рассматривается управляемая консервативная система с одной степенью свободы

$$\ddot{x} + f(x) = \varepsilon\sigma(1 - Kx^2)\dot{x}, \tag{21}$$

содержащая параметр K и при $\varepsilon = 0$ допускающая интеграл энергии

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \int f(x)dx = h(\text{const})$$

(σ принимает значение 1 или (-1)). Предполагается, что при $\varepsilon = 0$ система (21) допускает семейство невырожденных периодических движений $x = \varphi(h, t)$.

Необходимые и достаточные условия существования притягивающего цикла, близкого к колебанию с параметром системы $h = h^*$, даются простым корнем амплитудного уравнения

$$I(h) \equiv \int\limits_0^{T(h^*)} [1 - K(h^*)\varphi^2(h, t)]\dot{\varphi}(h, t)dt = 0.$$

Функция $K(h)$ вычисляется по формуле

$$K(h) = \frac{\int_0^{T(h)} \dot{\varphi}^2(h, t)dt}{\int_0^{T(h)} \varphi^2(h, t)\dot{\varphi}^2(h, t)dt}, \tag{22}$$

а неравенство $dK(h^*)/dh \neq 0$ доставляет условие простоты корня амплитудного уравнения.

Теорема 5. *Системой* (21) *с параметром K решается задача стабилизации любого колебания, близкого к колебанию консервативной системы с одной степенью свободы.*

Доказательство. Введем новое время $\tau = t/T(h)$. Тогда период колебаний не зависит от h и равен 1, формула (22) записывается в виде

$$K(h) = \frac{\int\limits_0^1 z^2(\tau)d\tau}{\int\limits_0^1 \varphi^2(h, T(h)\tau)z^2(\tau)d\tau}.$$

На семействе колебаний функция $\varphi^2(h,t)$ при фиксированном t монотонно зависит от h. Это справедливо для любого типа семейства: невырожденного или вырожденного. Следовательно, функция $K(h)$ монотонна на семействе колебаний консервативной системы.

Таким образом, достаточное условие в [7, теорема 1] выполняется всегда для любого типа семейства – нерожденного и вырожденного, и теорема 5 доказана.

Замечание 5. Для вырожденного семейства функция $K(h)$ вычисляется в явном виде (см. [13]).

Замечание 6. Согласно теореме 5 посредством адаптивной схемы получается исчерпывающее решение задачи стабилизации любого колебания из семейства консервативной системы с одной степенью свободы.

Замечание 7. Результат остается справедливым для консервативной системы с произвольным числом степеней свободы.

7. Приложения

1. Ограниченная плоская задача трех тел описывается уравнениями [14]:

$$\begin{gathered}\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial\Omega}{\partial x}, \quad \ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial\Omega}{\partial y}, \\ \Omega = \frac{1}{2}(x^2+y^2) + \frac{1-\mu}{r_0} + \frac{\mu}{r_1}, \quad \Omega(x,y) = \Omega(x,-y), \\ r_0^2 = (x+\mu)^2 + y^2, \quad r_1^2 = (x-1+\mu)^2 + y^2.\end{gathered} \tag{23}$$

Они содержат единственный безразмерный массовый параметр μ.

Система (23) допускает интеграл энергии. В силу своей инвариантности относительно преобразования

$$\{x, y, \dot{x}, \dot{y}, t\} \to \{x, -y, -\dot{x}, \dot{y}, -t\}$$

система (23) также относится к обратимой механической системе.

Положения относительного равновесия (точки либрации) находятся из уравнений

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial y} = 0.$$

Задача допускает пять точек либрации L_i, $i = 1, \ldots, 5$. При этом L_1, L_2, L_3 лежат на оси абсцисс x, а точки L_4 и L_5 расположены симметрично относительно оси x и образуют равносторонние треугольники с основными телами, расположенными на оси x.

Точки L_1, L_2 и L_3 относятся к равновесиям обратимой механической системы. К ним всегда примыкает симметричное ляпуновское семейство, для которого матрица A_f раздела 2 имеет жорданову 2-нулевую клетку. Применяется теорема 4. Глобальное семейство описывается консервативной системой с одной степенью свободы, обладающей симметричными орбитами. По теореме 5 задача орбитальной стабилизации любой орбиты решается адаптивной схемой управления.

К точкам L_4 и L_5 применяется теорема 1. Система (23) консервативна, поэтому глобальное семейство описывается консервативной системой с одной степенью свободы. Любая орбита глобального семейства стабилизируется применением теоремы 5.

Ограниченная задача трех тел является основной в теории орбит [15]. В теории управляемого орбитального движения решается задача орбитальной стабилизации. Результаты по задаче планируются подробно описать в отдельной статье.

2. Стабилизация колебаний спутника. Движение спутника в плоскости орбиты под действием гравитационных сил описывается уравнением В.В. Белецкого [5]. Далее рассматривается частный случай – круговой орбиты. Здесь уравнение Белецкого приобретает вид

$$\ddot{\alpha} + \mu \sin\alpha \cos\alpha = 0, \quad \dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dv}, \tag{24}$$

где μ – инерциальный параметр ($|\mu| \leqslant 3$), α – угол между радиусом-вектором центра масс и главной центральной осью инерции спутника в плоскости орбиты, v – истинная аномалия, выбранная в качестве независимой переменной. Получается уравнение математического маятника

$$\ddot{y} + \mu \sin y = 0, \quad \mu > 0, \quad y = 2\alpha,$$

или

$$\ddot{y} + |\mu| \sin y = 0, \quad \mu < 0, \quad y = 2\alpha + \pi.$$

Колебания спутника образуют семейство от начального отклонения по углу y, на котором период $T(h)$ возрастает.

В [13] для стабилизации колебаний предлагается применять мехатронную схему с осциллятором типа Ван дер Поля. Мехатронная схема является адаптивной в смысле данной статьи.

Согласно теореме 5 локальная стабилизация любого колебания достигается применением адаптивной схемы

$$\ddot{x} + |\mu| \sin x = \varepsilon\sigma(1 - Kx^2)\dot{x},$$

где $x = 2\alpha$, $\mu > 0$ или $x = 2\alpha + \pi$, $\mu < 0$, и выбирается $\sigma = 1$. Здесь уже не используется осциллятор типа Ван дер Поля.

Заметим, что схема стабилизации равновесия в задаче о вращательном движении спутника предлагается, например, в [16].

8. Заключение

Периодическое решение автономной системы общего вида в невырожденном случае может быть циклом или принадлежать семейству. Для цикла матрица Якоби имеет одно нулевое собственное значение, семейству соответствует жорданова k-нулевая клетка. Обычно рассматривается случай $k = 2$; для него в [3] построено глобальное семейство невырожденных периодических решений, которое описывается редуцированной системой второго порядка. Эти результаты справедливы для общего случая размерности $1 < k \leqslant n$ (n-размерность автономной системы). Для редуцированной системы порядка k строится адаптивная схема стабилизации колебаний. Применяется автономное управление с параметром $K(h)$, зависящим от параметра h глобального семейства. Оно является обобщением на систему произвольного порядка управления из [7]; значением h выделяется колебание в глобальном семействе. Стабилизация происходит путем реализации притягивающего цикла.

Для дифференциального уравнения n-го порядка по переменной x редуцированная система совпадает с исходной. Для стабилизации периодического решения применяется управление – нелинейная диссипация, линейная по скорости, действующая в окрестности цикла, содержащая параметр и обеспечивающая притяжение к циклу в пространстве $(x, x', \ldots, x^{(n-1)})$.

Аналогичные результаты известны (см. [10]) для симметричных периодических движений обратимых механических систем. В случае пространственно-временной симметрии матрица Якоби допускает нулевые собственные значения: простые и одну жорданову 2-клетку. Консервативной системе отвечает жорданова 2-нулевая клетка. Задача стабилизации колебаний семейства находит исчерпывающее решение для консервативной системы с одной степенью свободы: в управляемой системе автоматически выполняются условие стабилизации выбранного колебания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андриевский Б.Р., Балашов М.В., Бахтадзе Н.Н., и др.* Теория управления (дополнительные главы): Учебное пособие / Под ред. Д. А. Новикова. М.: ЛЕНАНД, 2019.

2. *Van der Pol B.* On relaxation-oscillations in the circuit with non-linear resistence // Philos. Mag. 1927. Ser. 7. V. 3. No. 13. P. 65–80.

3. *Тхай В.Н.* Стабилизация колебаний управляемой автономной системы // АиТ. 2023. № 5. С. 29–44.
   Tkhai V.N. Stabilization of Oscillations of a Controlled Autonomous System// Autom. Remote Control. 2023. V. 84. No. 5. P. 520–531.

4. *Euler L.* Consideratios de motu corporum coelestrium // Novi Comm. Acad. Sci. Petrop. 1766. T.10.

5. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника Земли относительно центра масс // Искусственные спутники Земли. 1958. № 1. С. 25–43. М.: Изд-во АН СССР, 1958.

6. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956.

7. *Тхай В.Н.* Стабилизация колебания управляемой механической системы // АиТ. 2019. № 11. С. 83–92.
Tkhai V.N. Stabilizing the Oscillations of a Controlled Mechanical System // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 11. P. 1996–2004.

8. *Lamb J.S.W., Roberts J.A.G.* Time-reversal symmetry in dynamical systems: A survey // Physica D. 1998. V. 112. No. 1–2. P. 1–39.

9. *Тхай В.Н.* Обратимость механических систем // Прикл. матем. и механ. 1991. Т. 55. Вып. 4. С. 578–586.

10. *Тхай В.Н.* Семейство колебаний, связывающее устойчивое и неустойчивое перманентные вращения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2023. № 6. С. 165–179.

11. *Тхай В.Н.* Стабилизация колебаний управляемой обратимой механической системы // АиТ. 2022. № 9. С. 94–108.
Tkhai V.N. Stabilization of Oscillations of a Controlled Reversible Mechanical System // Autom. Remote Control. 2022. V. 83. No. 9. P. 94–108.

12. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения / Собр. соч. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2. С. 7–263.

13. *Тхай В.Н.* Режим цикла в связанной консервативной системе // АиТ. 2022. № 2. С. 90–106.
Tkhai V.N. Cycle Mode in a Coupled Conservative System // Autom. Remote Control. 2022. V. 83. No. 2. P. 237–251.

14. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М.: Наука, 1964.

15. *Szebehely V.* Theory of Orbits. New York, Academic Press. 1967.

16. *Александров А.Ю., Тихонов А.А.* Электродинамическое управление с распределенным запаздыванием для стабилизиции ИСЗ на экваториальной орбите // Космические исследования. 2022. Т. 60. № 5. С. 404–412.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галяевым.

Поступила в редакцию 30.01.2024

После доработки 30.04.2024

Принята к публикации 10.06.2024